



MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE



SOCIETATEA
DE ȘTIINȚE
MATEMATICE
DIN ROMÂNIA

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - 17.02.2018
BAREM DE CORECTARE
CLASA A VIII - A

SUBIECTUL 1

a) Arătați că $\sqrt{2(x+y)} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y}$, oricare ar fi numerele reale pozitive x și y .

b) Dacă a și b sunt numere reale astfel încât $a > 0$ și $ab = 1$, arătați că:

$$\sqrt{a+4b} + \sqrt{a+9b} + \sqrt{b+4a} + \sqrt{b+9a} \geq 7\sqrt{2}$$

G.M. nr. 9, Daniel Sitaru, Drobeta Turnu Severin

Rezolvare si barem:

a) $\sqrt{2(x+y)} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y} \Leftrightarrow 2(x+y) \geq (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 \Leftrightarrow$ 1p

$\Leftrightarrow 2x + 2y \geq x + 2\sqrt{xy} + y \Leftrightarrow x - 2\sqrt{xy} + y \geq 0 \Leftrightarrow$ 1p

$\Leftrightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$, inegalitate adevărată, $\forall x, y \in \mathbb{R}_+$ 1p

b) Din $ab = 1$ și $a > 0 \Rightarrow b = \frac{1}{a} > 0$

Din a) obține $\sqrt{x+y} \geq \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{2}}$, $x, y > 0$ (1)

Aplică (1) pentru $x = a$ și $y = 4b \Rightarrow \sqrt{a+4b} \geq \frac{\sqrt{a} + \sqrt{4b}}{\sqrt{2}}$ 1p

Analog obține: $\sqrt{a+9b} \geq \frac{\sqrt{a} + \sqrt{9b}}{\sqrt{2}}$, $\sqrt{b+4a} \geq \frac{\sqrt{b} + \sqrt{4a}}{\sqrt{2}}$ și $\sqrt{b+9a} \geq \frac{\sqrt{b} + \sqrt{9a}}{\sqrt{2}}$ 1p

Prin însumare obține: $\sqrt{a+4b} + \sqrt{a+9b} + \sqrt{b+4a} + \sqrt{b+9a} \geq \frac{7\sqrt{a} + 7\sqrt{b}}{\sqrt{2}} = \frac{7(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{2}}$

Dar $b = \frac{1}{a} \Rightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a} + \sqrt{\frac{1}{a}} = \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}} \geq 2\sqrt{\sqrt{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}}} = 2$ 1p

Finalizează și găsește $\sqrt{a+4b} + \sqrt{a+9b} + \sqrt{b+4a} + \sqrt{b+9a} \geq 7\sqrt{2}$ 1p



MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE



SOCIETATEA
DE ȘTIINȚE
MATEMATICE
DIN ROMÂNIA

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - 17.02.2018
BAREM DE CORECTARE
CLASA A VIII - A**

SUBIECTUL 2

Fie $x, y \in \mathbf{R}$ astfel încât $2x^2 + 2y^2 - 11 = 2(xy + 2x - y)$.

a) Arătați că: $x + y \in [-7, 9]$;

b) Arătați că: $y(x-1) \in [-18, 22]$.

Rezolvare si barem:

a) Expresia dată este echivalentă cu: $2x^2 + 2y^2 - 2xy - 4x + 2y - 11 = 0$

Restrânge expresia și o aduce la forma: $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (x-y)^2 = 16$ 2p

Dar: $(x-2)^2 \geq 0$, $(y+1)^2 \geq 0$ și $(x-y)^2 \geq 0$ pentru $\forall x, y \in \mathbf{R}$.

Găsește $(x-2)^2 \leq 16$, $(y+1)^2 \leq 16$ și $(x-y)^2 \leq 16$

de unde obține: $x-2, y+1, x-y \in [-4, 4]$ (1) 1p

Deci $x \in [-2, 6]$ și $y \in [-5, 3] \Rightarrow x+y \in [-7, 9]$ 1p

b) Din (1), prin înmulțire, obține $(x-2)(y+1) \in [-16, 16]$ (2) și $y-x \in [-4, 4]$ (3) 1p

Din (2) găsește $xy + x - 2y \in [-14, 18]$ (4) 1p

Din (3) și (4), prin adunare, obține $xy + x - 2y + y - x \in [-18, 22]$ adică $y(x-1) \in [-18, 22]$ 1p

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - 17.02.2018
BAREM DE CORECTARE
CLASA A VIII - A

SUBIECTUL 3

$ABCD A'B'C'D'$ este un cub. Fie $CE \perp OC'$, $E \in OC'$, $BE \cap DC' = \{M\}$ și $DE \cap BC' = \{N\}$, O fiind centrul pătratului $ABCD$.

- a) Arătați că $(A'BD) \parallel (CMN)$;
b) Calculați sinusul unghiului diedru determinat de planele $(AB'D')$ și (CMN) .

Rezolvare si barem:

- a) Notăm $AB = l$

Calculează $C'O = \frac{l\sqrt{6}}{2}$ și $OE = \frac{l\sqrt{6}}{6}$

de unde $\frac{OE}{OC'} = \frac{1}{3} \Rightarrow E$ centrul de greutate al $\triangle C'BD$

Obține $[BM]$ și $[DN]$ mediane în $\triangle C'BD \Rightarrow [MN]$ linie mijlocie în $\triangle C'BD \Rightarrow MN \parallel BD$ 1p

Din N mijlocul lui $[BC'] \Rightarrow N$ centrul pătratului $BCC'B' \Rightarrow C, N, B'$ coliniare 1p

Din $MN \parallel BD$ și $CN \parallel A'D$ obține $(A'BD) \parallel (CMN)$ 1p

- b) Fie $A'C' \cap B'D' = \{O'\}$

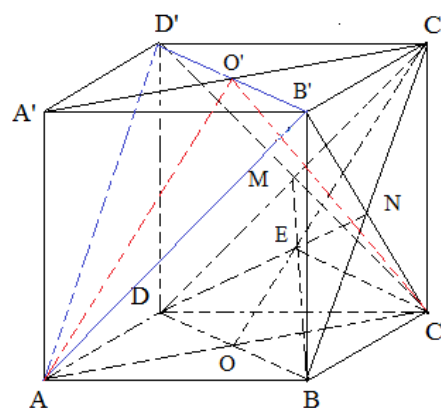
Găsește $(AB'D') \cap (CMN) = B'D'$, $AO' \perp B'D'$, $CO' \perp B'D'$

de unde: $\angle((AB'D'), (CMN)) = \angle(AO'C)$ 1p

Calculează $A_{\triangle AO'C} = \frac{OO' \cdot AC}{2} = \frac{l^2 \sqrt{2}}{2}$

și $A_{\triangle AO'C} = \frac{AO' \cdot CO' \cdot \sin \angle(AO'C)}{2} = \frac{3l^2 \cdot \sin \angle(AO'C)}{4}$ 1p

Finalizare: $\sin \angle(AO'C) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ 1p



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - 17.02.2018
BAREM DE CORECTARE
CLASA A VIII - A

SUBIECTUL 4

Fie ABCD trapez dreptunghic cu $m(\angle A) = m(\angle D) = 90^\circ$, $m(\angle B) = 30^\circ$, $DC = a$ și $AC \perp BC$.

Fie $MD \perp (ABC)$ astfel încât $MD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

- a) Calculați distanța de la punctul M la dreapta BC;
b) Calculați distanța de la punctul A la planul (MBC).

Rezolvare si barem:

- a) Construim $DE \perp BC$, $E \in BC$.

$$\left. \begin{array}{l} MD \perp (ABC) \\ DE \perp BC \\ DE, BC \subset (ABC) \end{array} \right\} \begin{array}{l} T_{3\perp} \\ \Rightarrow ME \perp BC \Rightarrow d(M, BC) = ME \end{array}$$

2p

Calculează și găsește $ME = a$

1p

- b) Fie $AD \cap BC = \{P\}$, $DF \perp (MBC)$, $AQ \perp (MBC)$, $F, Q \in (MBC)$, adică $d(A, (MBC)) = AQ$

Avem imediat $pr_{(MBC)} PD = PF$ și cum $A \in PD \Rightarrow Q \in PF$

1p

Din $DF \perp (MBC)$ și $AQ \perp (MBC)$ avem imediat $DF \parallel AQ$

1p

Calculează și găsește $AC = 2DC = 4DE = 2a$ și $DF = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

1p

$\triangle PDE \sim \triangle PAC$, $\triangle PDF \sim \triangle PAQ$ și obține $\frac{DF}{AQ} = \frac{1}{4}$ de unde $AQ = a\sqrt{3}$

1p

